Условие:

Пусть $(a, b) = 1$. Доказать, что $(a + b, a - b) = 1$ или 2.

Решение:

$(a, b) = 1$. Докажем, что $(a + b, a - b) = 1$ или 2.

Пусть $(a + b, a - b) = d \in \mathbb{N} \Rightarrow (*) a + b = xd, a - b = yd$, где $x, y \in \mathbb{Z}$ и $(x, y) = 1$. Суммируем эти равенства, а еще и вычитаем:

$$\begin{matrix} a + b + (a - b) = (x + y)d \Rightarrow 2a = (x + y)d \\ a + b - (a - b) = (x - y)d \Rightarrow 2b = (x - y)d \end{matrix} \quad (**)$$

Сперва из $(*)$ если $(a, d) > 1$ и $(a + b) \vdots d, \Rightarrow (a + b) \vdots (a, d), a \vdots (a, d) \Rightarrow b \vdots (a, d) \Rightarrow a, b \vdots (a, d) > 1 \Rightarrow (a, b) > 1 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow (a, d) = 1$. Аналогично $(b, d) = 1$. Из $(**) \Rightarrow 2a \vdots, d,$ но $(a, d) = (b, d) = 1 \Rightarrow 2 \vdots d, d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 1$ или $d = 2$, но $d = (a + b, a - b)$. Утверждение доказано.