Условие:

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$(3+e^x)yy' = e^x.$

Решение:

Это нелинейное уравнение 1-ого порядка с разделяющимися переменными, ведь

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow (3+e^x)\cdot y\frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow y\cdot dy = \frac{e^x}{e^x+3}dx, \text{интегрируем} \Rightarrow \int y dy = \int \frac{e^x}{e^x+3}dx \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{e^x}{e^x+3}dx = \int \frac{de^x}{e^x+3} = \boxed{e^x = t \Rightarrow} = \int \frac{dt}{t+3} = \ln|t+3| + C_0 = \ln(e^x+3) + C_0 \Rightarrow$$

$y^2 = 2\ln(e^x+3) + C$, где C —произвольная постоянная $\Rightarrow$ получаем общее решение уравнения: (их два):

$$y = \sqrt{2\ln(e^x+3)+C}, \qquad y = -\sqrt{2\ln(e^x+3)+C}.$$