



Условие:

Дана корреляционная функция $K_X(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$: $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}$.

Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = aX'(t)$.

Решение:

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad Y(t) = aX'(t).$$

Имеем теорему:

Корреляционная функция производной стационарной случайной функции равна второй производной от её корреляционной функции, взятой со знаком минус:

$$K_{X'}(\tau) = -K_X''(\tau), \quad K_X'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} (\sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}) = \sigma^2 \cdot (-2\alpha^2 \cdot \tau) e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

$$K_X''(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} (-2\sigma^2 \alpha^2 \tau \cdot e^{-\alpha^2 \tau^2}) = -2\alpha^2 \sigma^2 (e^{-\alpha^2 \tau^2} + \tau(-2\alpha^2 \tau) e^{-\alpha^2 \tau^2}) = -2\alpha^2 \tau^2 \cdot (1 - 2\alpha^2 \tau^2) \cdot e^{-\alpha^2 \tau^2},$$

$$K_Y(\tau) = K_{aX'}(\tau) = a^2 K_{X'}(\tau) \Rightarrow K_Y(\tau) = -a^2 K_X''(\tau), \Rightarrow \boxed{K_Y(\tau) = 2a^2 \alpha^2 \tau^2 (1 - 2\alpha^2 \tau^2) e^{-\alpha^2 \tau^2}}.$$