



Условие:

Методом Лагранжа найти нормальный вид квадратичной формы:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Решение:

По методу Лагранжа отделяем полные квадраты:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_1 \cdot 2x_2 + 4x_2^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - \left((\sqrt{3}x_2)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \right)^2 \right) + \frac{1}{3}x_3^2 + 3x_3^2 = \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - \left(\sqrt{3}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}x_3 \right)^2, \end{aligned}$$

⇒ делаем замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = \sqrt{3}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ y_3 = \sqrt{\frac{10}{3}}x_3 \end{cases}$$

⇒ получаем искомый нормальный вид исходной квадратичной формы:

$$\boxed{f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2}.$$

(нормальный вид вещественной квадратичной формы есть $f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot y_i^2$, где $\varepsilon_i = \pm 1, i = \overline{1, n}$)