https://mathproblemsbank.net/
support@mathproblemsbank.net

Условие:

Выяснить, образует ли линейное пространство множество всех действительных чисел, если в нём определены сумма любых двух элементов a и b, равная $a+b$ и произведение любого элемента a на любое действительное число ε, равное $\varepsilon \cdot a$.

Решение:

Выясним, образует ли линейное пространство множество $\mathbb{R}$ с определёнными на нём операциями сложения и умножения на число: $<\mathbb{R},+,\cdot>$.

Для этого проверим выполнимость аксиом линейного пространства.

Сначала проверяем замкнутость относительно указанных операций:

$\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon \cdot a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\mathbb{R}$ замкнуто относительно этих операций.

а) $\forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow a+b=b+a$ (стандартное сложение чисел),

б) $\forall a,b\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$,

в) $0 \in \mathbb{R}, a+0=0+a=a, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow 0$ −нейтральный элемент относительно сложения,

г) $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow -a \in \mathbb{R}, a+(-a)=-a+a=0, \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент по сложению:

$-a$ (противоположный элемент),

д) $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon(\beta a)=\varepsilon\beta a=(\varepsilon\beta)a$,

е) $1 \cdot a = a\ \forall a \in \mathbb{R}$ (нейтралный элемент по умножению),

ё) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon,\beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\varepsilon+\beta)a=\varepsilon a+\beta a$,

ж) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon(\alpha+b)=\varepsilon a+\varepsilon b$.

Как видим, все аксиомы линейного пространства выполняются $\Rightarrow\ <M,+,\cdot>$ будет линейным пространством.