



Условие:

Найти координаты вектора X в базисе $e' = \{e'_1; e'_2; e'_3\}$, если в базисе $e = \{e_1; e_2; e_3\}$ $X = (1; -4; 8)$ и

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e'_2 = \frac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Решение:

В базисе $e = \{e_1; e_2; e_3\}$ координаты вектора $X = (1; -4; 8)$.

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e'_2 = \frac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

Запишем матрицу перехода от e к e' :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ формула для координат X в базисе e' есть:

$$X = A \cdot X' \Rightarrow X' = A^{-1} \cdot X, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Вычисляя алгебраические дополнения к минорам матрицы, получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow X' = A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & \frac{9}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ искомые координаты X в базисе e' будут:

$$X' = (0; 12; 8).$$