



Условие:

Выяснить, образуют ли группу относительно сложения множество целых чисел, кратных 5.

$$M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n : 5\} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Решение:

Выясним, образует ли M группу относительно сложения. Проверим аксиомы группы:

а) Ассоциативность:

$$\forall 5n; 5m; 5k \in M (n; m; k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (5n + 5m) + 5k = 5n + 5m + 5k = 5n + (5m + 5k) = 5(n + m + k)$$

$\Rightarrow$ ассоциативность выполняется.

б) $n = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5n = 5 \cdot 0 = 0 \in M$; $\forall 5m \in M \Rightarrow 5m + 5 \cdot 0 = 5 \cdot 0 + 5m = 5m \Rightarrow 5 \cdot 0 = 0$ - является нейтральным элементом.

в) $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5n + 5 \cdot (-n) = 5 \cdot (-n) + 5n = 0$ для любого $5n \in M$ существует обратный элемент $5 \cdot (-n) \in M$.

Все аксиомы группы выполняются $\Rightarrow M$ является группой по отношению сложения.