Условие:

Выяснить, образуют ли группу относительно умножения множество степеней числа 7 с целыми показателями.

$M = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Решение:

Выясним, образует ли множество M группу относительно умножения. Для этого проверим аксиомы группы:

а) ассоциативность:

$\forall\ 7^n;\ 7^m;\ 7^k\ \in M\ (n; m; k\ \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\,7^n \cdot 7^m) \cdot 7^k\ =\ 7^n \cdot 7^m \cdot 7^k\ =\ 7^n \cdot \left(7^m \cdot 7^k\,\right) = 7^{m+n+k} \Rightarrow$

ассоциативность выполняется.

б) При $n = 0\ \Rightarrow 7^0 = 1;\ \forall\ 7^m \in M \Rightarrow 7^m \cdot 7^0 =\ 7^m \cdot 1 = 7^0 \cdot\ 7^m = 7^m \Rightarrow 7^0 = 1 \in M -$ нейтральный элемент.

в) $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-n) \in \mathbb{Z};\ \ 7^n \cdot 7^{-n} = 7^{-n} \cdot 7^n = 7^0 = 1 \Rightarrow$ для любого $7^n \in M$ существует обратный элемент $7^{-n} \in M$.

Все аксиомы группы выполняются $\Rightarrow M$ является группой относительно умножения.