



Условие:

Найти решение задачи Коши:

$$y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$$

Решение:

Сначала решаем однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1, \quad |y| = |x|^{-1} \cdot e^{C_1} \Rightarrow y = \frac{C}{x},$$

где C — произвольная постоянная.

По методу вариации произвольной постоянной получаем:

$$C = C(x), \quad y' = \frac{C'x - C}{x^2} \Rightarrow \frac{C'x - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} = 3x \Rightarrow C' = 3 \Rightarrow C(x) = 3x + C_1, \Rightarrow$$

$$y = \frac{3x + C_1}{x}, \quad y(1) = 1 \Rightarrow \frac{3 + C_1}{1} = 1 \Rightarrow C_1 = -2 \Rightarrow y = 3 - \frac{2}{x}, \text{ будет искомым решением.}$$

$$\text{Ответ: } y = 3 - \frac{2}{x}.$$