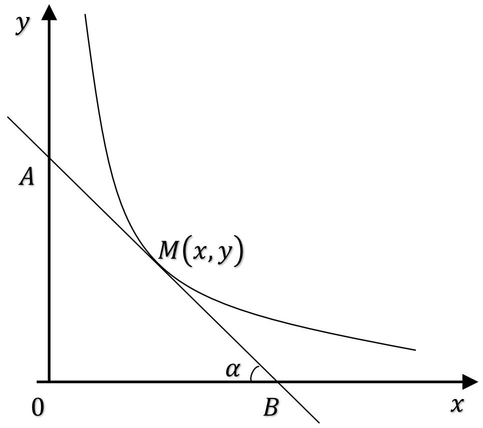
Условие:

Составить дифференциальное уравнение семейства кривых, у которых отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится точкой касания $M(x,y)$ в отношении $|AM|:|MB| = 2:1$, где A - точка пересечения касательной с осью Oy, B - с осью Ox.

Решение:



Уравнение касательной в точке $M(x,y)$ будет $Y - y = y'(X - x)$ (так-как угловой коэффициент $k = \tan\alpha = y'(x)$), где (X, Y) текущая точка касательной. При $X_A = 0 \Rightarrow Y_A = -y'x + y$, $A(0; y - y'x)$, при $Y_B = 0 \Rightarrow X_B = x - \frac{y}{y'}, \Rightarrow B\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$, M делит AB в отношении $2:1, \Rightarrow x = \frac{X_A + 2X_B}{3}$, из обоих равенств вытекает:

$$x = \frac{2}{3}\left(x - \frac{y}{y'}\right) \Rightarrow xy' + 2y = 0, \Rightarrow y' = -\frac{2y}{x}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомых кривых.

Ответ: $y' = -\frac{2y}{x}$.