



Условие:

Показать, что поле градиентов скалярного поля $\varphi = 6x^3y - 2xy^4 + z^4x^2y$ безвихревое.

Решение:

$$\varphi = 6x^3y - 2xy^4 + z^4x^2y.$$

Показать, что поле градиентов безвихревое, означает, что ротор градиента φ должен равняться нулю:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \quad P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 18x^2y - 2y^4 + 2z^4xy, \quad Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6x^3 - 8xy^3 + z^4x^2,$$

$$R = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 4z^3x^2y, \quad \text{grad } \varphi = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rot grad } \varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

$$\text{но } \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 4z^3x^2, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 8z^3xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 18x^2 - 8y^3 + 2z^4x \Rightarrow \text{rot grad } \varphi = 0 \Rightarrow$$

поле градиентов безвихревое.