



Условие:

Доказать, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Решение:

Докажем, что $\mathbb{Q}$ счётно.

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$, можем принять, что знаменатель любого рационального числа положителен, а знак числа совпадает со знаком числителя $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ для любого } m \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим

$$Q_m = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{m}{1}; \frac{m}{2}; \frac{m}{3}; \dots \right\} \Rightarrow \mathbb{Q} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} Q_m.$$

Теперь очевидно имеем взаимнооднозначное соответствие $Q_m \leftrightarrow \mathbb{N}$, ($\forall m \in \mathbb{Z}$), ибо $\frac{m}{n} \leftrightarrow n, n = 1, 2, \dots$, значит Q_m счётно при каждом $m \in \mathbb{Z}$. Но множество целых чисел счётно, и имеем, что объединение счетного числа счетных множеств счётно $\Rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} Q_m$ так-же счётно, но $\mathbb{Q} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} Q_m \Rightarrow \mathbb{Q}$ – счётно.