



Условие:

Вычислить интеграл с помощью вычетов:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{7 + \sqrt{13} \sin t}.$$

Решение:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{7 + \sqrt{13} \sin t}$$

$1/(7 + \sqrt{13} \sin t)$ является рациональной функцией от $\sin t$, непрерывной на $[0; 2\pi]$
 $(7 + \sqrt{13} \sin t \geq 7 - \sqrt{13} > 0) \Rightarrow$ обозначим $z = e^{it}$, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad dz = ie^{it} dt = iz dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}, \quad |z| = 1, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{7 + \sqrt{13} \sin t} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{7 + \sqrt{13} \cdot \frac{z^2 - 1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{\sqrt{13}z^2 + 14iz - \sqrt{13}} \cdot dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + \frac{14i}{\sqrt{13}}z - 1} dz = \frac{2}{\sqrt{13}} \oint_{|z|=1} f(z) dz, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{14i}{\sqrt{13}}z - 1} = \frac{1}{(z + \sqrt{13}i)\left(z + \frac{i}{\sqrt{13}}\right)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(z)$ имеет две особые точки $z_1 = -\sqrt{13}i, z_2 = -i/\sqrt{13}$, из них только z_2 лежит в круге $|z| \leq 1$

$(|z_2| = \frac{1}{\sqrt{13}} < 1, |z_1| = \sqrt{13} > 1) \Rightarrow$ по основной теореме о вычетах $\Rightarrow$

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_2} f(z), z_2 - \text{полус } 1 - \text{ого порядка} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z_2} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -\frac{i}{\sqrt{13}}} \frac{1}{z + \sqrt{13}i} = -\frac{\sqrt{13}i}{12} \Rightarrow I = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sqrt{13}i}{12}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.