Условие:

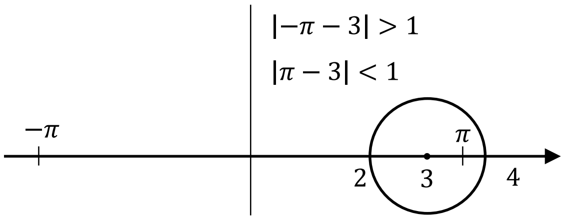
Вычислить интеграл комплексной переменной:

$$\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{1-\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz.$$

Решение:

$$\mathrm{I} = \oint\limits_{|z-3|=1} \frac{1-\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz.$$

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2-\pi^2} = \frac{1-\cos z}{(z-\pi)(z+\pi)} \Rightarrow$$



$f(z)$ имеет две особые точки $z_1 = \pi, z_2 = -\pi$, из них только z_1 лежит в круге $|z-3| < 1$, $\Rightarrow$ из основной теоремы о вычетах $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \oint\limits_{|z-3|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)\text{, но } f(z) \xrightarrow[z\to\pi]{} \infty, (z-\pi)f(z) = \frac{1-\cos z}{z+\pi} \xrightarrow[z\to\pi]{} \frac{2}{2\pi} \neq \infty,$$

$\Rightarrow z_1 = \pi$ —полюс 1-ого порядка $\Rightarrow$ вычет в ней будет:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to\pi}\big((z-\pi)f(z)\big) = \lim_{z\to\pi}\frac{1-\cos z}{z+\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{1}{\pi} = 2i.$$

Ответ: $2i$.