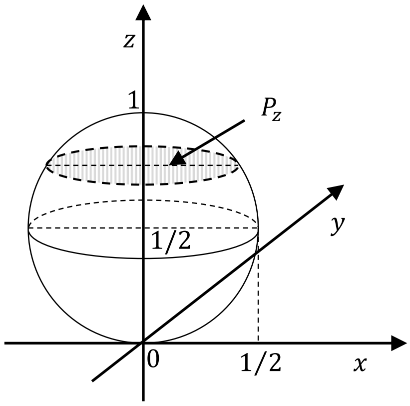
Условие:

Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \quad \text{где} \quad V: x^2+y^2+z^2=z.$$

Решение:

$$V: x^2+y^2+z^2=z, \qquad V: x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$



Возьмем любое сечение шара, параллельное плоскости XOY:

$P_z: x^2+y^2 \le -z-z^2$, имеем:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{P_z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \iint\limits_{P_z} \sqrt{z}\,dxdy = \int\limits_0^1 \sqrt{z}\cdot\pi(z-z^2)dz = \pi\cdot\left(\frac{2}{5}\,z^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}\,z^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)=\frac{4\pi}{35}.$$

Ответ: $\frac{4\pi}{35}$.