



Условие:

Доказать, что сумма квадратов 3-х последовательных целых не может быть полным квадратом.

Решение:

Пусть это возможно $\Rightarrow$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ имеем:

$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = k^2$, где $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = k^2 \Rightarrow 3(n^2 + 2n + 1) + 2 = k^2$
значит k^2 дает в остатке 2 при делении на 3, что невозможно, ибо при $k = 3m \Rightarrow k^2 \equiv 0 \pmod{3}$, при $k = 3m + 1, k^2 = 9m^2 + 6m + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, при $k = 3m + 2 \Rightarrow k^2 = 9m^2 + 12m + 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow k^2$ может дать в остатке 0 или 1 при делении на 3 $\Rightarrow$ получили противоречие. Значит сумма 3-х последовательных целых не может быть полным квадратом. Утверждение доказано.