Условие:

Найти все значения параметра a, при которых минимальное значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ на отрезке $x \in [0;2]$ равно 3.

Решение:

$f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$, $\min\limits_{x\in[0;2]} f(x) = 3$. $f(x) = (2x-a)^2 - 2a + 2$.

График $y = f(x)$ есть парабола, ветви направлены вверх.

Рассмотрим 2 случая.

Вершина параболы есть точка $x = \frac{a}{2}, y = f\left(\frac{a}{2}\right)$.

a) Вершина параболы на отрезке $[0;2]$, т. е. $\frac{a}{2} \in [0;2] \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = -2a + 2 = 3, \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \notin [0;2]$, противоречие.

б) Вершина параболы вне отрезка $[0;2] \Rightarrow$ минимальное значение $f(x)$ принимает на одном из концов $[0;2]$. $f(0) = a^2 - 2a + 2, f(2) = a^2 - 10a + 18$.

$\frac{a}{2} \notin [0;2] \Rightarrow a \notin [0;4]$. Если $a < 0 \Rightarrow f(2) > f(0)\ (a < 2) \Rightarrow f(0) = a^2 - 2a + 2 = 3, a^2 - 2a - 1 = 0,$

$a = 1 \pm \sqrt{2}, a < 0 \Rightarrow a = 1 - \sqrt{2}$. Если же $a > 4 \Rightarrow f(0) > f(2)\ (a > 2) \Rightarrow f(2) = a^2 - 10a + 18 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 10a + 15 = 0, a = 5 \pm \sqrt{10}, a > 4 \Rightarrow a = 5 + \sqrt{10}$.

Ответ: $a = 1 - \sqrt{2}$ и $a = 5 + \sqrt{10}$.