



Условие:

Найдите все значения  $a$ , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x' + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0 \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение:

Дискриминантом 1-ого уравнения будет:

$$D = (5a + 2)^2 - 4(4a^2 + 2a) = 25a^2 + 20a + 4 - 16a^2 - 8a = 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  корни трехчлена  $x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a$  будут:

$$x_{1,2} = \frac{-5a - 2 \pm (3a + 2)}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-5a - 2 - 3a - 2}{2} = -4a - 2, x_2 = \frac{-5a - 2 + 3a + 2}{2} = -a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 4a + 2)(x + a), \Rightarrow \text{из } (x - x_1)(x - x_2) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min\{x_1, x_2\} < x < \max\{x_1, x_2\}, \text{ т. е. } x_1 \neq x_2.$$

Рассмотрим случаи:

$$a) x_1 > x_2 \Rightarrow -4a - 2 > -a \Rightarrow a < -\frac{2}{3}, \text{ из 2-ого уравнения системы } \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - a^2}, x_2 < x < x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < -a < x < -4a - 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x = \sqrt{4 - a^2} \Rightarrow -a < \sqrt{4 - a^2} < -4a - 2,$$

$$\text{все части положительны, возводим в квадрат } \Rightarrow a^2 < 4 - a^2 < 16a^2 + 16a + 4 \Rightarrow a^2 < 2,$$

$$a(17a + 16) > 0, \quad a < -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow 17a + 16 < 0 \Rightarrow a < -\frac{16}{17} < -\frac{2}{3}, \quad a^2 < 2 \Rightarrow |a| < \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}}.$$

$$b) x_1 < x_2 \Rightarrow -4a - 2 < -a \Rightarrow a > -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Если } a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0 \Rightarrow x = -\sqrt{4 - a^2}, \quad -4a - 2 < -\sqrt{4 - a^2} < -a, \Rightarrow a < -\sqrt{4 - a^2} < 4a + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 < 2, a(17a + 16) > 0, \quad a \geq 0 \Rightarrow 17a + 16 > 0, \quad a^2 < 2 \Rightarrow \boxed{0 < a < \sqrt{2}}.$$

$$\text{Если же } a < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < a < 0, -4a - 2 < x < -a, \text{ если } -4a - 2 > 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{4 - a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4a - 2 < \sqrt{4 - a^2} < -a, \text{ опять все части положительны, } (4a + 2)^2 < 4 - a^2 < a^2 \Rightarrow a^2 > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a < -\sqrt{2}, \Rightarrow -\frac{2}{3} < a < -\sqrt{2} \Rightarrow 2 > 3\sqrt{2}, \quad 4 > 18 \text{ противоречие } \Rightarrow -4a - 2 \leq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Если } x = \sqrt{4 - a^2} \Rightarrow \sqrt{4 - a^2} < -a \Rightarrow a^2 > 2, -\frac{2}{3} < a < -\sqrt{2}, \text{ опять противоречие } \Rightarrow x = -\sqrt{4 - a^2},$$



$$-4a - 2 < -\sqrt{4 - a^2} < -a, \Rightarrow 4a + 2 > \sqrt{4 - a^2} \Rightarrow 16a^2 + 16a + 4 > 4 - a^2 \Rightarrow a(17a + 16) > 0,$$

$$a < 0 \Rightarrow 17a + 16 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < a < -\frac{16}{17} \Rightarrow 34 > 48, \text{ опять противоречие.}$$

Получили следующие значения  $a$ , при которых система имеет хотя бы одно решение:

$$\left(-\sqrt{2}; -\frac{16}{17}\right) \cup (0; \sqrt{2}).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{2}; -\frac{16}{17}\right) \cup (0; \sqrt{2}).$$