Условие:

Решить неравенство для всех неотрицательных значений параметра a:

$a^3x^4+2a^2x^2-8x+a+4\geq 0, \qquad a\geq 0.$

Решение:

$a^3x^4+2a^2x^2-8x+a+4=ax^2a^2x^2+ax^2(a^2x^2+2ax)-2x(a^2x^2+2ax)+4ax^2+2a^2x^2-$

$-8x+a+4=(ax^2-2x)(a^2x^2+2ax)+4(ax^2-2x+1)+2a^2x^2+a=(ax^2-2x)(a^2x^2+2ax)+$

$+4(ax^2-2x+1)+a(ax^2-2x+1)+2ax+a^2x^2=(a^2x^2+2ax)(ax^2-2x+1)+4(ax^2-2x+1)+$

$+a(ax^2-2x+1)=(ax^2-2x+1)(a^2x^2+2ax+a+4)\geq 0.$

Замечаем, что 2-ой множитель $a^2x^2+2ax+a+4=(ax+1)^2+a+3>0$, ибо $a\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow ax^2-2x+1\geq 0, \qquad \frac{D}{4}=1-a$, при $1-a<0\Rightarrow$ решением неравенства будет вся прямая

$x\in(-\infty;+\infty)$, а при $1-a\geq 0\Rightarrow 0\leq a\leq 1\Rightarrow$ при $a=0, x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$, и при $0<a\leq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-a}}{a};+\infty\right).$

Ответ: $a=0, x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right], 0<a\leq 1, x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{1-a}}{a}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{1-a}}{a};+\infty\right), \ \ a>1, x\in(-\infty;+\infty).$