



Условие:

Решить уравнение:

$$2 \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_4 x.$$

Решение:

$$\text{Обозначим } \sqrt[4]{x} = t \Rightarrow x = t^4, t > 0. \Rightarrow 2 \log_6(t^2 + t) = \log_4 t^4,$$

$$\log_4 t^4 = 4 \log_2 t = 4 \cdot \frac{1}{2} \log_2 t = 2 \log_2 t, \quad 2 \log_6(t^2 + t) = 2 \log_6(t(t+1)) = 2 \log_6 t + 2 \log_6(t+1),$$

$$2 \log_6 t + 2 \log_6(t+1) = 2 \log_2 t \Rightarrow \log_6 t + \log_6(t+1) = \log_2 t,$$

$$\log_6(t+1) = \log_2 t - \log_6 t, \text{ если } t = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ но тогда } 2 \log_6 2 = \log_4 1 = 0, \text{ что невозможно } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq 1, t \neq 1 \Rightarrow \text{можем записать } \log_2 t = \frac{1}{\log_t 2} \Rightarrow \log_2 t - \log_6 t = \frac{1}{\log_t 2} - \frac{1}{\log_t(2 \cdot 3)} =$$
$$= \frac{1}{\log_t 2} - \frac{1}{\log_t 2 + \log_t 3} = \frac{\log_t 3}{\log_t 2 \cdot \log_t 6} \Rightarrow \log_6(t+1) = \frac{\log_t 3}{\log_t 2 \cdot \log_t 6} \Rightarrow \frac{\log_6(t+1)}{\log_6 t} = \frac{\log_t 3}{\log_t 2},$$

$$\text{из свойств логарифма } \Rightarrow \log_t(t+1) = \log_2 3 (*).$$

$$\text{Рассмотрим функцию } f(t) = \log_t(t+1) = \frac{\ln(t+1)}{\ln t}, f'(t) = \left( \frac{\ln(t+1)}{\ln t} \right)' = \frac{\frac{\ln t}{t+1} - \frac{\ln(t+1)}{t}}{\ln^2 t} =$$

$$= \frac{t \ln t - (t+1) \ln(t+1)}{t(t+1) \ln^2 t} = \frac{1}{t(t+1) \ln^2 t} \ln \frac{t^t}{(t+1)^{t+1}} < 0 \text{ при всех } t > 0, \text{ ибо } t^t < (t+1)^{t+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(t) < 0, t \in (0; +\infty) \Rightarrow f(t) \text{ убывает строго } \Rightarrow \text{каждое значение принимает лишь в одной точке, замечаем что из } (*) \text{ при } t = 2 \Rightarrow f(t) = \log_2 3 \Rightarrow t = 2 \text{ единственное решение } (*) \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2^4 = 16.$$

Ответ:  $x = 16$ .