



Условие:

Разложить функцию $f(x) = x^3$ в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; 1]$.

Решение:

Чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0; l]$ по косинусам, нужно продолжить $f(x)$ на $[-l; 0]$ четным образом, так-как для четной функции на $[-l; l]$ разложение будет по косинусам:

$$\text{Ряд Фурье: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$\text{где } b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \left(\int_{-l}^l g(x) dx = 0, \text{ где } g(x) = f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \text{ нечетная функция} \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

$f(x) = x^3$ на $[0; 1] \Rightarrow$ продолжим на $[-1; 0]$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0; 1] \\ -x^3, & x \in [-1; 0] \end{cases}, \quad l = 1, \quad b_n = 0, \quad a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x^3 \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x^3 d \sin(n\pi x) = \boxed{\text{интегрируем по частям}} =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(x^3 \sin(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx^3 \right) = \boxed{\begin{matrix} \sin n\pi = 0 \\ \cos n\pi = (-1)^n \end{matrix}} \Rightarrow \frac{6}{n^2 \pi^2} \int_0^1 x^2 d \cos(n\pi x) =$$

$$= \frac{6}{n^2 \pi^2} \left(x^2 \cos(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(n\pi x) dx^2 \right) = \frac{6}{n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d \sin(n\pi x) \right) =$$

$$= \frac{6}{n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \left(x \sin(n\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right) \right) = \frac{6}{n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \frac{6}{n^2 \pi^2} \left(\cos n\pi - \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{6}{n^4 \pi^4} ((n^2 \pi^2 - 2)(-1)^n + 2).$$

$$a_n = \frac{6}{n^4 \pi^4} ((-1)^n (n^2 \pi^2 - 1) + 2) \Rightarrow \text{искомый ряд Фурье будет:}$$

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{6}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot ((-1)^n (n^2 \pi^2 - 1) + 2)}{n^4} \cos(n\pi x)}$$